

Параллельные алгоритмы решения упругих задач

ИММ

Думшева Т. Д.
Зенкова Е.С.

ИМАШ

Федотов В.П.
Спевак Л.Ф.
Привалова В.В.



Основные типы численных методов

- Исходная формулировка:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b) w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma$$

- Слабая формулировка:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma$$

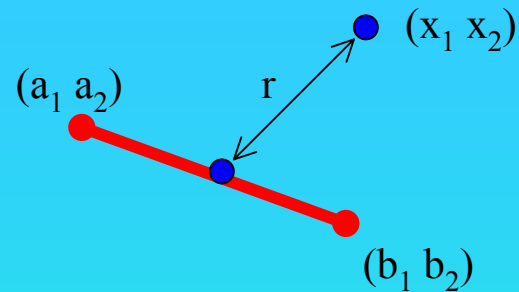
- Обратная формулировка

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w) u d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma$$

Три уровня распараллеливания

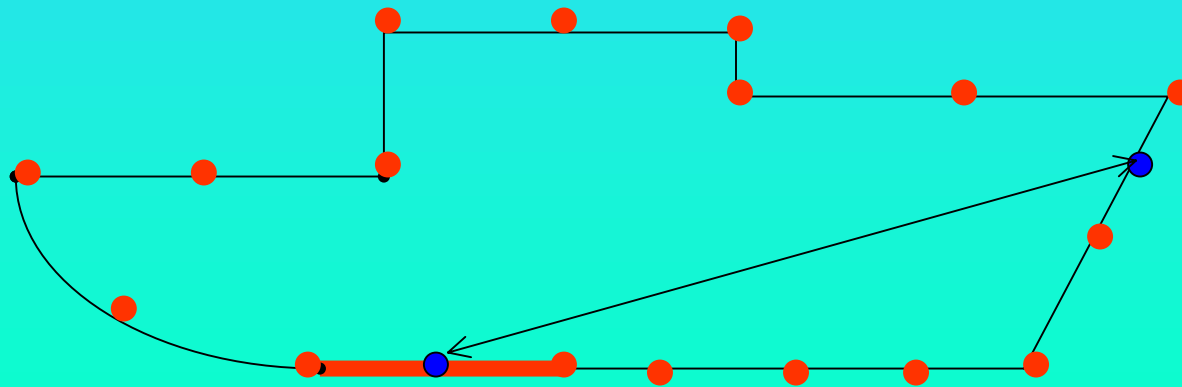
1. Формирование матрицы разрешающей системы и свободного вектора
2. Решение системы алгебраических уравнений и нахождение искомых поверхностных напряжений и перемещений
3. Вычисление напряжений и деформации во внутренней области

Формирование матрицы разрешающей системы и свободного вектора



- Основной блок численной схемы

Из таких блоков можно сформировать любую плоскую фигуру



Формирование матрицы разрешающей системы и свободного вектора

Использование основного блока

основано на функции влияния

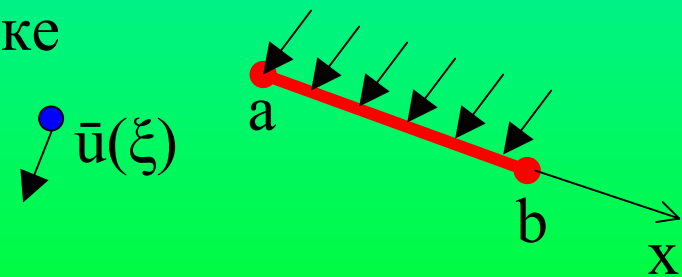
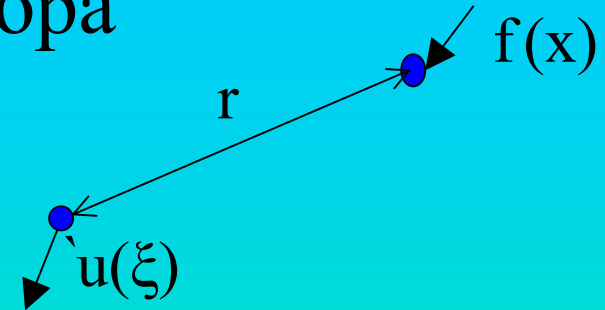
Если задана сосредоточенная
единичная нагрузка, то перемещение

$$u_i = u_{ij}^*(r) f_j$$

$$u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - \nabla_i r \nabla_j r \right]$$

Если задана распределенная на отрезке
нагрузка, то перемещение

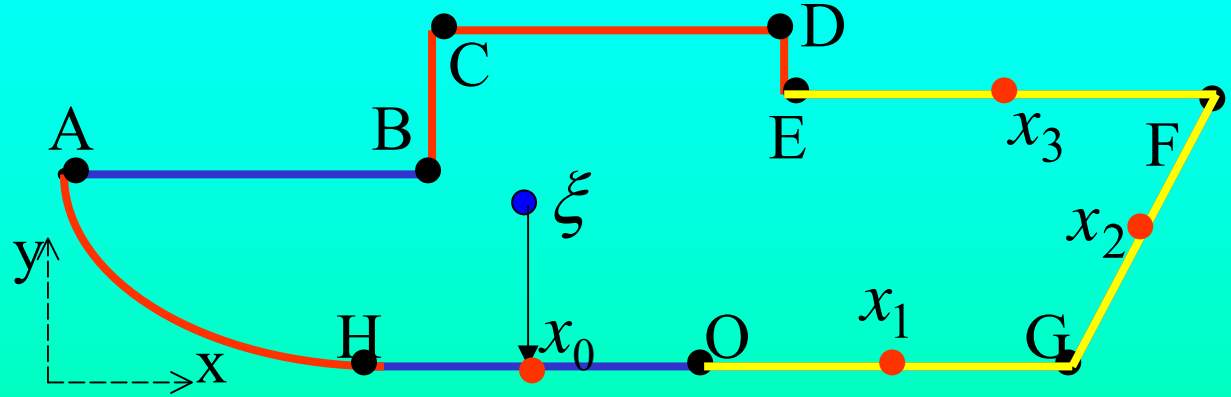
$$u_i(\xi) = \int_a^b u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) dS(x)$$



Формирование матрицы разрешающей системы и свободного вектора

Если упругое тело
конечных размеров

А на границах заданы
смешанные условия



$$\frac{1}{2}u_j(x_0) = \int_S \left[u_{ji}^*(x_0, \mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) - f_{ji}^*(x_0, \mathbf{x}) \cdot u_i(\mathbf{x}) \right] dS(\mathbf{x}).$$

Будем считать, что разбиение на граничные элементы достаточно большое,
а поверхностные напряжения и перемещения в элементе постоянны

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_j(x_0) = & f_i(x_1) \cdot \int_O^G u_{ji}^*(x_0, x) dx - u_i^*(x_1) \cdot \int_O^G f_{ji}^*(x_0, x) dx + f_i^*(x_2) \cdot \int_G^F u_{ji}^*(x_0, x) dx - u_i(x_3) \cdot \int_G^F f_{ji}^*(x_0, x) dx \\ & + f_i(x_3) \cdot \int_F^E u_{ji}^*(x_0, x) dx - u_i^*(x_3) \cdot \int_F^E f_{ji}^*(x_0, x) dx + \dots \end{aligned}$$

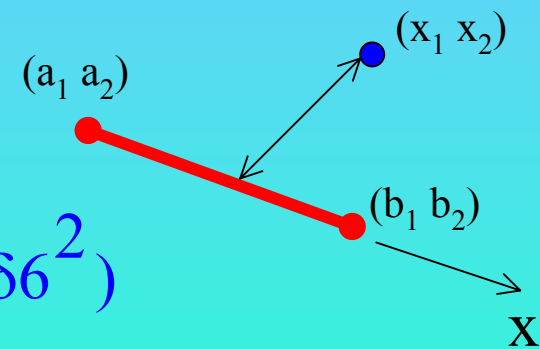
Аналитическое интегрирование

В качестве примера

$$\int_a^b u_{12}(x) dx = -c1 \left(\frac{1}{2} (Q1 - Q5) d6 - 2 (Q3 - Q4) d5 - \frac{\delta2 \delta1}{\sqrt{d}} \right)$$

$$c1 := -\frac{1}{8 \pi \mu (1 - \nu)}$$

-всего четыре
КОНСТАНТЫ



$$Q1 := \ln(\delta1^2 (\delta5^2 + \delta6^2)) \quad Q2 := \ln(\delta5^2 + \delta6^2)$$

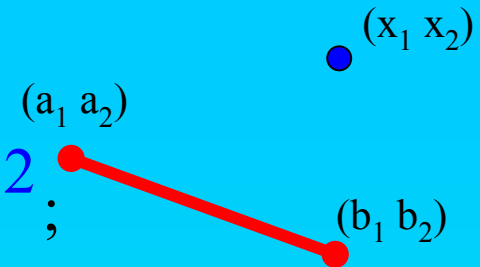
$$Q3 := \arctan\left(\frac{\delta1 \delta3 + \delta2 \delta4}{\delta30}\right) \quad Q4 := \arctan\left(\frac{\delta1 \delta5 + \delta2 \delta6}{\delta30}\right)$$

$$Q5 := \ln(\delta1^2 (\delta3^2 + \delta4^2)) \quad Q6 := \ln(\delta3^2 + \delta4^2)$$

Аналитическое интегрирование

Геометрические величины

$$\delta 1 := b_1 - a_1 ; \delta 2 := b_2 - a_2 ; d := \delta 1^2 + \delta 2^2 ;$$



$$d5 := - \frac{-x2_1 \delta 1 \delta 2^2 + x2_2 \delta 2 \delta 1^2 - \delta 7 \delta 2 \delta 1}{\sqrt{d^3}}$$

-таких ШЕСТЬ
- ВЕЛИЧИН

$$d6 := - \frac{x2_1 (-\delta 2^3 + \delta 1^2 \delta 2) + x2_2 (-\delta 1^3 + \delta 2^2 \delta 1) - \delta 7 (\delta 2^2 - \delta 1^2)}{\sqrt{d^3}}$$

$$\delta 3 := a_1 - x_1 ; \delta 4 := a_2 - x_2 ; \delta 5 := b_1 - x_1 ; \delta 6 := b_2 - x_2$$

-таких 12
ВЕЛИЧИН

Система алгебраических уравнений
относительно неизвестных напряжений и
перемещений на границе области

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_{i\xi}^{s\xi}{}_{k\xi} = \sum_{sx=0}^3 \sum_{kx=0}^{k-1} \sum_{ix=0}^1 \left(\mathbf{f}_{ix}^{sx}{}_{kx} \int_{S_{sx}{}_{kx}} \mathbf{u}_{i\xi}^*{}_{ix}(\xi^{s\xi}{}_{k\xi}, \mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) - \right. \\ \left. - \mathbf{u}_{ix}^{sx}{}_{kx} \int_{S_{sx}{}_{kx}} \mathbf{f}_{i\xi}^*{}_{ix}(\xi^{s\xi}{}_{k\xi}, \mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \right)$$

$$\forall \mathbf{x} \in S_{sx}{}_{kx} \quad \text{где} \quad S = \bigcup_{sx=0}^3 \bigcup_{kx=0}^{k-1} S_{sx}{}_{kx}$$

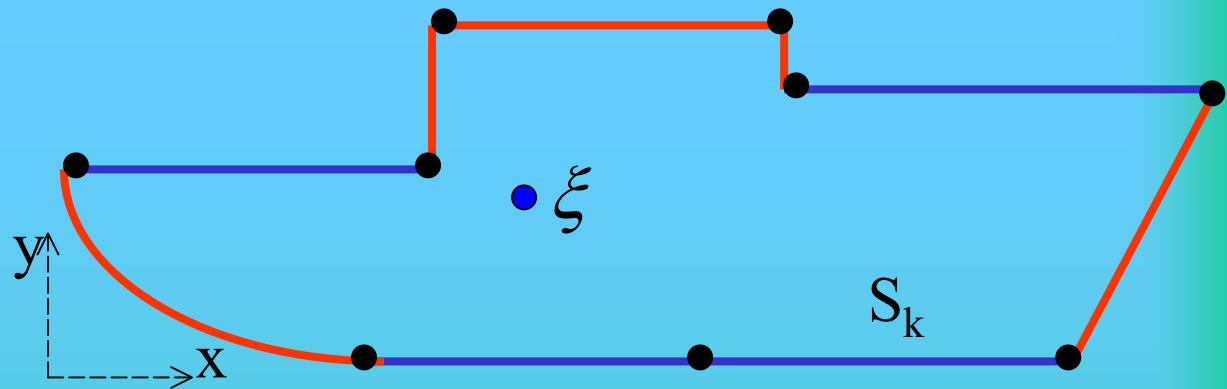
$\mathbf{x}^{sx}{}_{kx} = (\mathbf{x}_0^{sx}{}_{kx}, \mathbf{x}_1^{sx}{}_{kx})$ - середина конечного элемента $S_{sx}{}_{kx}$

$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{sx}{}_{kx}) = (\mathbf{u}_0^{sx}{}_{kx}, \mathbf{u}_1^{sx}{}_{kx})$ - перемещение в $\mathbf{x}^{sx}{}_{kx}$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{sx}{}_{kx}) = (\mathbf{f}_0^{sx}{}_{kx}, \mathbf{f}_1^{sx}{}_{kx})$ - поверхностное напряжение в $\mathbf{x}^{sx}{}_{kx}$

Вычисление напряжений и деформаций во внутренней области

Перемещения в любой внутренней точке ξ области вычисляются независимо и по формуле



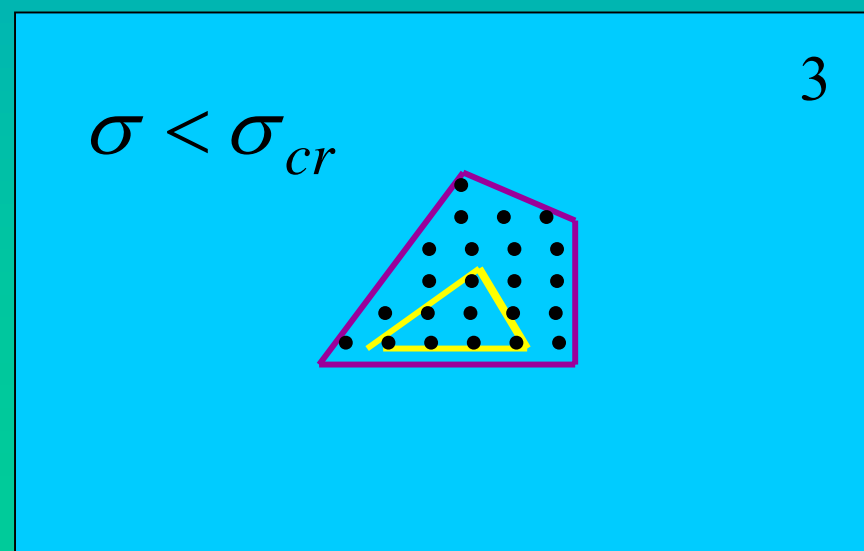
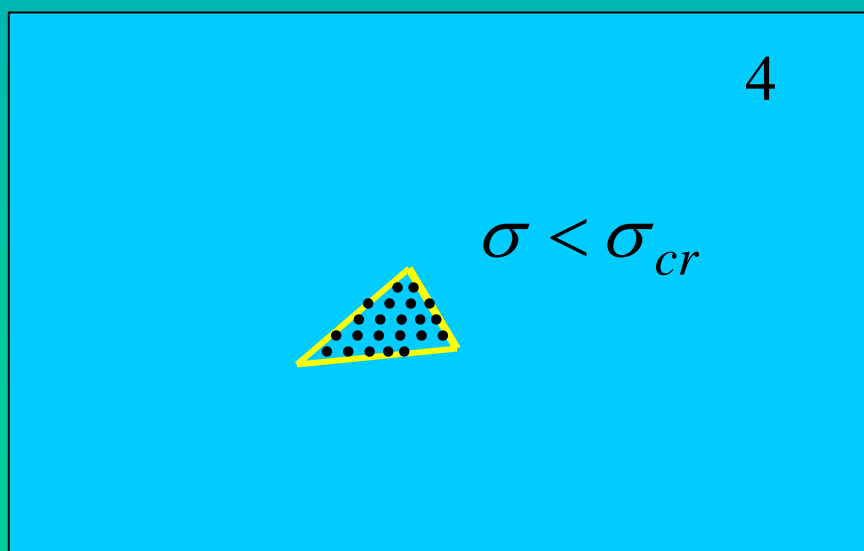
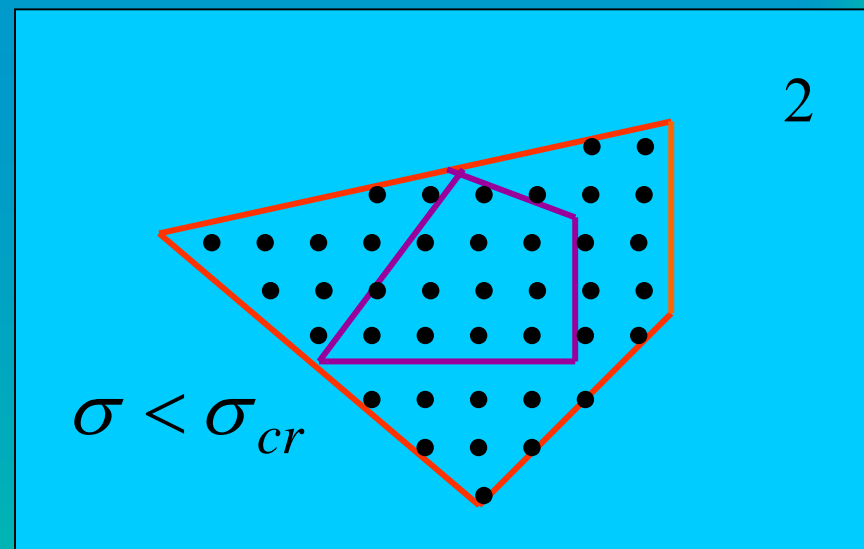
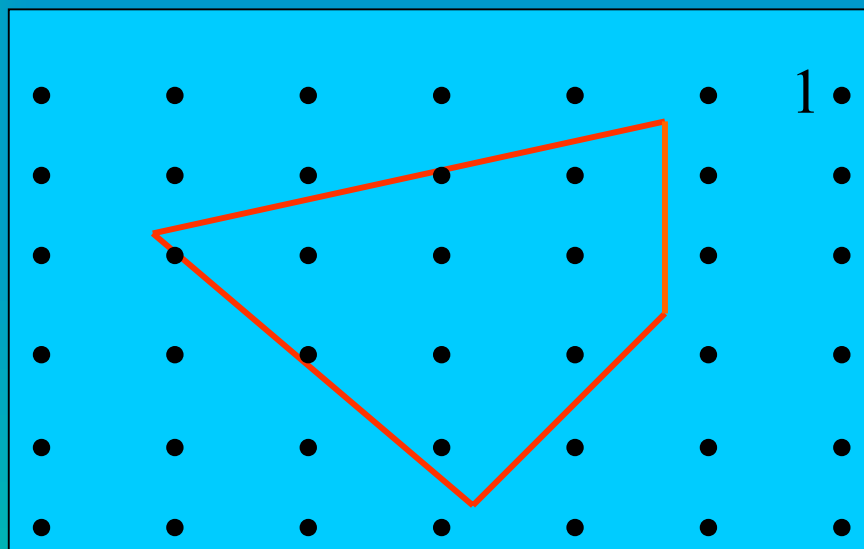
$$u_j(\xi) = f_i^*(x_k) \cdot \int_{S_k} u_{ji}^*(\xi, x) dS_k(x) - u_i^*(x_k) \cdot \int_{S_k} f_{ji}^*(\xi, x) dS_k(x)$$

Здесь все значения поверхностных напряжений и перемещений известны. Интегралы вычисляются по уже найденным формулам

Так как перемещения определяются как непрерывные функции, деформации и напряжения вычисляются точно и по формулам

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \mu} \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right)$$

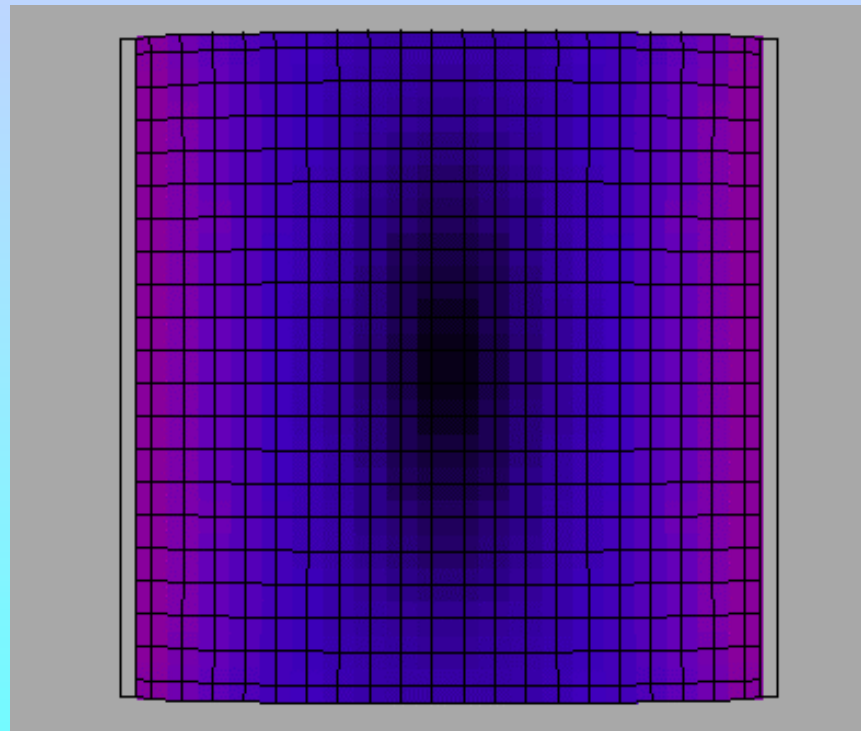
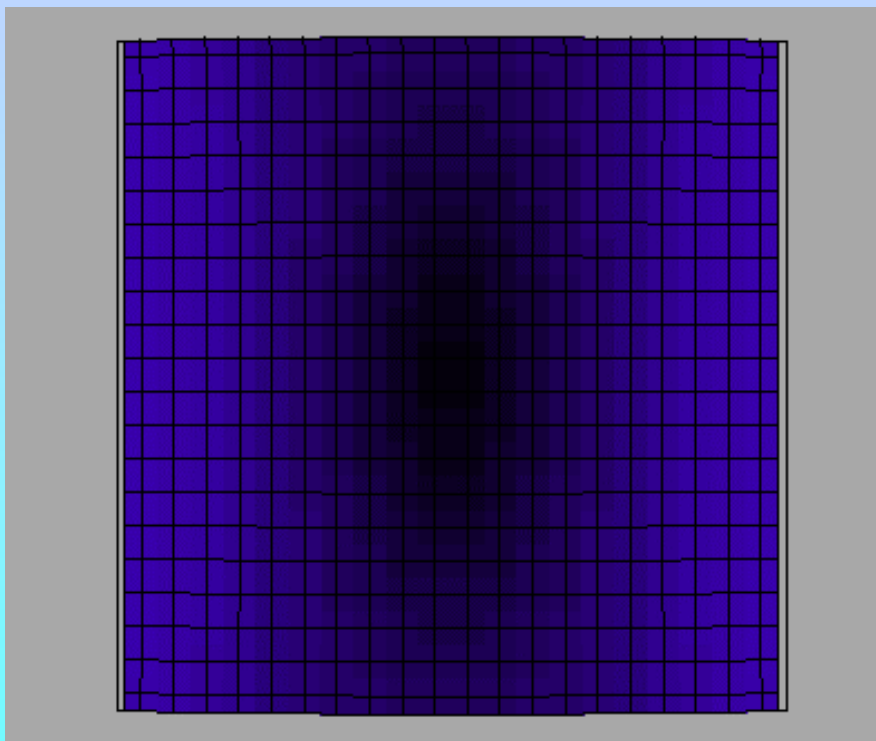
Вычисление напряжений и деформации во внутренней области



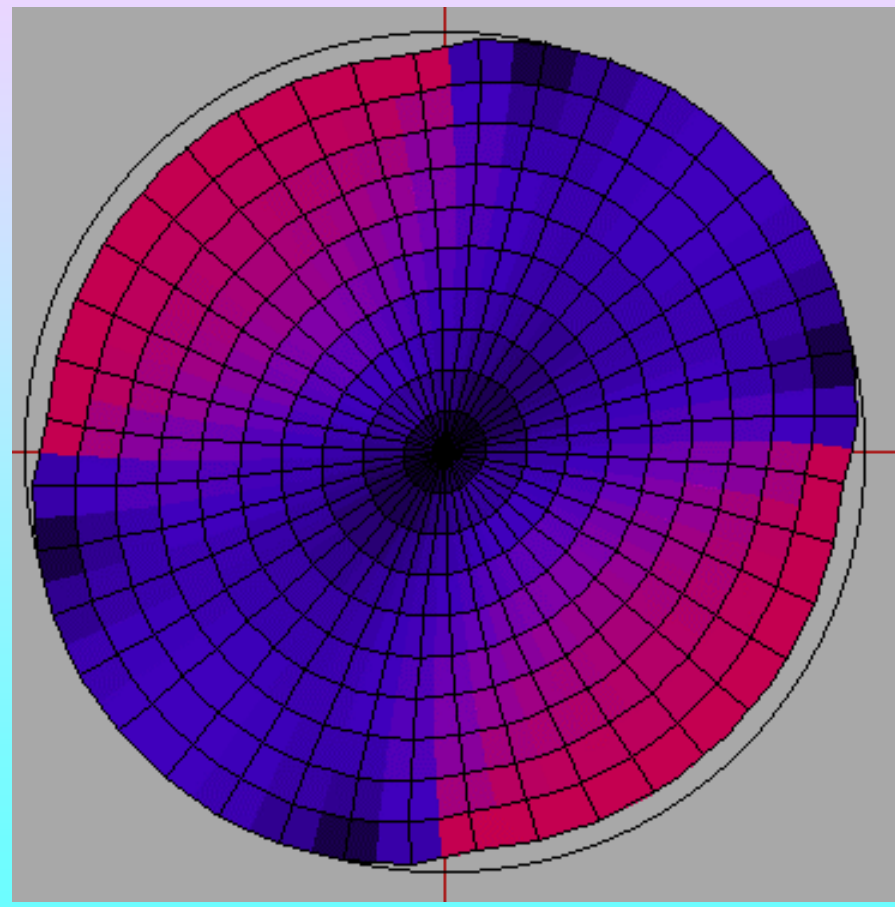
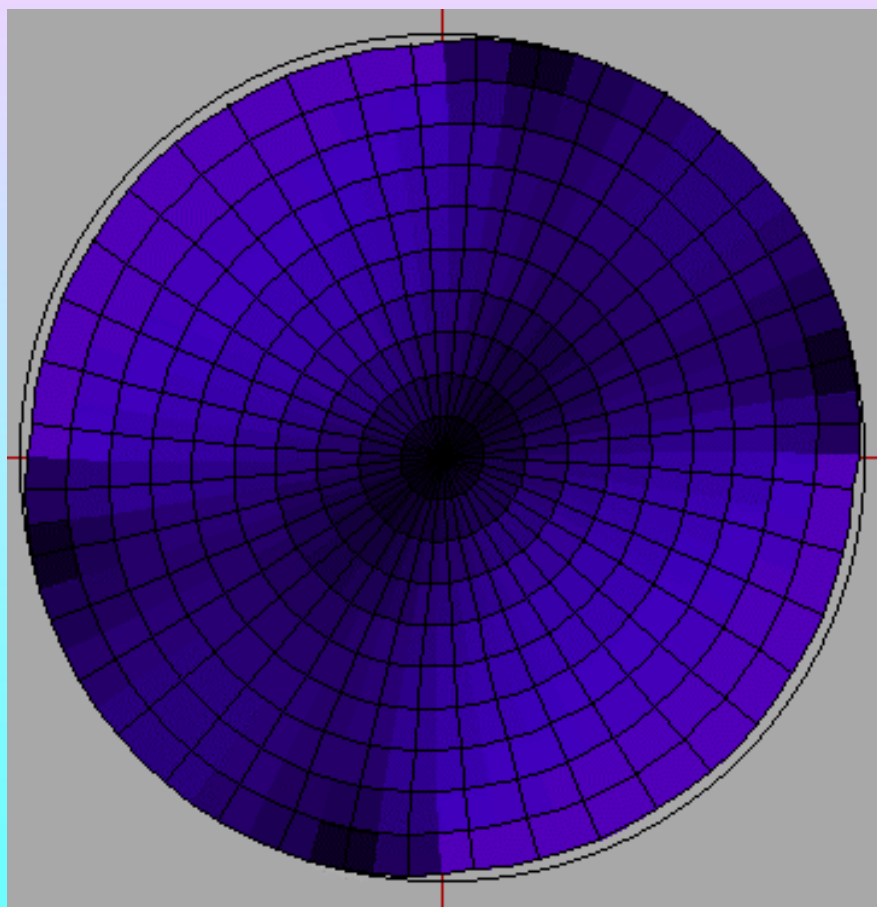
Решение упругой задачи

ρ	T_{-} (сек)	S - ускорение	E- эффективность
1	13247		
2	6881	1.93	0.96
4	3357	3.94	0.99
8	1792	7.4	0.92
16	950	13.93	0.87
32	590	22.45	0.7

Напряженно-деформированное состояние
квадрата при граничном перемещении равном
 $L/80$ и $L/40$.



Напряженно-деформированное состояние круговой области
при граничном перемещении равном $R/40$ и $R/20$



**Напряженно-деформированное состояние при
боковых перемещениях R/40 и R/20**

